1) Scriviamo $b(v,w) = \begin{pmatrix} b_1(v,w) \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n(v,w) \end{pmatrix}$ con $b_1, \ldots, b_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilineari.

Allora $\frac{d}{dt} b(\alpha(t)v, \alpha(t)w)\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} b_1(\alpha(t)v, \alpha(t)w)|_{t=0} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$

Siano $B_1, \ldots, B_n$ le matrici di $b_1, \ldots, b_n$, cioè

$$b_i(v,w) = {}^t v \cdot B \cdot w.$$

Come nell'es. 10, foglio n. 3, si dim. che

$$\frac{d}{dt} b_i(\alpha(t)v, \alpha(t)w)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\, {}^t(\alpha(t)v) \cdot B_i\, \alpha(t)w\Big|_{t=0} =$$

$$\alpha'(0)v B_i w + {}^t v B_i \alpha'(0) w$$

da cui l'uguaglianza voluta.

2) Oss.: $\mathcal{A} \cong \mathbb{R}^n$ come sp. vett., $n = \dim(\mathcal{A})$, scegliendo una base.

Fissiamo $v, w \in \mathcal{A}$. L'applicazione $C_{v,w} : GL(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \longmapsto f(\beta(v,w)) - \beta(f(v), f(w))$$

è continua, e

$$Aut(\mathcal{A}) = \bigcap_{v,w \in \mathcal{A}} C_{v,w}^{-1}(0)$$ quindi $Aut(\mathcal{A})$ è chiuso in $GL(\mathcal{A})$.

3) a) Sia $X \in Lie(Aut(\mathcal{A}))$, cioè $e^{tX} \in Aut(\mathcal{A})\ \forall t \in \mathbb{R}$

(identif. $\mathcal{A}$ con $\mathbb{R}^n$, $GL(\mathcal{A})$ con $GL(n, \mathbb{R})$)

Dati $v, w \in A$, allora

$$e^{tX} \beta(v,w) = \beta(e^{tX} v, e^{tX} w)$$

Derivando in $t=0$, per la parte 1) otteniamo

$$X \beta(v,w) = \beta(Xv, w) + \beta(v, Xw)$$

Segue: $\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(A)) \subseteq \mathrm{Der}(A)$.

b) Dim. che $\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(A)) \overset{(?)}{\supseteq} \mathrm{Der}(A)$. Questa inclusione è più difficile, ma non si usa poi nella parte 4) dell'esercizio.

Sia allora $X \in \mathrm{Der}(A)$, è da dim. che $e^{tX} \overset{(?)}{\in} \mathrm{Aut}(A)$ $\forall t \in \mathbb{R}$,

cioè $$e^{tX} \beta(v,w) \overset{(?)}{=} \beta(e^{tX} v, e^{tX} w) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall v, w \in A.$$

Si possono esplicitare gli esponenziali e confrontarli usando che $X \in \mathrm{Der}(A)$, ma è laborioso. Vediamo allora un altro modo.

Consid. le due funzioni
$$F_1(t) = e^{tX} \beta(v,w) \qquad \text{(con } v, w \text{ fissati)}$$
$$F_2(t) = \beta(e^{tX} v, e^{tX} w)$$

Abb. $F_1(0) = \beta(v,w) = F_2(0)$. Deriviamole in ogni $t \in \mathbb{R}$.
Anche qui usiamo un trucco invece di dover rifare il rag. di 1):

$$F_1'(t) = \frac{d}{dh} F_1(t+h)\Big|_{h=0} =$$

$$= \frac{d}{dh} e^{(t+h)X} \beta(v,w) \Big|_{h=0} = \frac{d}{dh} e^{hX} e^{tX} \beta(v,w) \Big|_{h=0} =$$

$$= X e^{tX} \beta(v,w)$$

Notiamo $F_1'(t) = X F_1(t)$.

Ora: $F_2'(t) = \frac{d}{dh} \beta\left(e^{(t+h)X} v, e^{(t+h)X} w\right)\Big|_{h=0} =$

$$= \frac{d}{dh} \beta\Big(e^{hX} \underbrace{e^{tX} v}_{= \tilde{v}}, e^{hX} \underbrace{e^{tX} w}_{= \tilde{w}}\Big)\Big|_{h=0} = \beta(X\tilde{v}, \tilde{w}) + \beta(\tilde{v}, X\tilde{w})$$

$$= X \beta(\tilde{v}, \tilde{w}) = X . F_2(t)$$

Quindi F_1 ed F_2 sono entrambe soluzioni del seguente pb di Cauchy:

$$\begin{cases} f'(t) = X f(t) \\ f'(0) = \beta(v,w) \end{cases} \qquad \text{con } f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

(sist. lineare omogeneo del primo ordine a coeff. costanti)

Segue $F_1(t) = F_2(t)$ $\forall t$, cioè $e^{tX} \in Aut(A)$ $\forall t$.

4) Sia $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ sgr chiuso, consid. la rappr. aggiunta

$Ad: G \to GL(Lie(G))$

Abb. visto a lezione che l'immagine di G è in realtà contenuta nell'insieme degli automorfismi di $Lie(G)$ come algebra di Lie:

$$Ad(G) \subseteq Aut(Lie(G))$$

Segue dal punto 3) l'inclusione

$$ad(Lie(G)) \subseteq Der(Lie(G))$$

cioè $\forall x \in Lie(G)$: $ad(x)$ è una derivazione, cioè

$$[x,[y,z]] = ad(x)([y,z]) = [ad(x)(y), z] + [y, ad(x)(z)] =$$

$$= [[x,y],z] + [y,[x,z]] \qquad \forall y,z \in Lie(G)$$

che è equivalente all'id. di Jacobi